Mécanique des fluides compressibles

Exercice 3.1

Montrer, en invoquant l'équation de continuité, que l'on peut toujours écrire :

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho A \vec{u}) = \rho \frac{DA}{Dt}$$

où ρ est la masse volumique, et A un scalaire ou un vecteur (par exemple, $A=1$, $A=\vec{c}$, $A=e_0$). L'identité vectorielle suivante peut être utile :

$$\nabla \cdot (\alpha \vec{a}) = \alpha \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla \alpha$$

où α est un scalaire ou un vecteur, et $\vec{a}$ un vecteur.

Exercice facultatif

Exercice 3.2

Propagation d'une onde de pression dans une conduite flexible (vaisseau sanguin)

La vitesse de propagation d'une onde de pression dans un milieu fluide infini est donnée par la formule donnée en classe :

$$a_f^{\,2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$$

Dans une conduite infiniment rigide emplie de fluide, la vitesse d'une onde de pression est identique à celle dans un milieu infini. Par contre, l'élasticité de la conduite peut modifier grandement la vitesse de propagation d'une pulsation. Un exemple dramatique est fourni pas la vitesse de propagation d'une onde de pression dans un vaisseau sanguin (la pulsation est générée par chaque battement du cœur). La vitesse peut alors descendre jusqu'à quelques mètres par seconde (au lieu des 1'450 m/s dans un milieu liquide infini).

a. Montrer que pour une conduite de section A, qui peut varier sous l'effet de la pression, les équations de conservation de masse et quantité de mouvement se résument à (pour un fluide non visqueux et un écoulement quasi-monodimensionnel) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

b. Faire l'hypothèse que les variations de masse volumique, d'aire, de pression, et de vitesse sont infinitésimales :

$$\begin{aligned} &u = u' \\ &p = p_0 + p', \quad p' \ll p_0 \\ &\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho' \ll \rho_0 \\ &A = A_0 + A', \quad A' \ll A_0 \end{aligned}$$

Réécrire les équations en négligeant les termes du second ordre et montrer :

$$\rho_0 \frac{\partial A'}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 A_0 \frac{\partial}{\partial x}(u') = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}$$

c. Une variation infinitésimale de pression *p'* est couplée à une variation infinitésimale de masse volumique ρ' par la relation :

$$p' = a_f^{\,2} \cdot \rho'$$

où a_f est la vitesse du son dans un milieu fluide infini.

De plus, si la conduite a un module de Young *E*, un rayon *R*, et une épaisseur *h*, il est possible de montrer que la variation d'aire *A'* pour une variation de pression *p'* est donnée par :

$$A' = A_0 \frac{2R}{h} \frac{p'}{E}$$

Montrer alors que la variation de pression *p'* obéit l'équation d'onde :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

où la vitesse *a* de l'onde de pression est donnée par :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a_f^{\,2}} + \frac{1}{a_s^{\,2}}$$

où a_s est une vitesse d'onde caractéristique dans la conduite emplie de fluide. Donner l'expression de cette vitesse en fonction des propriétés de la conduite et du fluide.

d. Montrer que pour une conduite infiniment rigide, l'onde de pression se propage comme dans un milieu infini.

e. Montrer que pour une conduite extrêmement flexible, la vitesse de l'onde est essentiellement donnée par a_s.

f. Donner des valeurs raisonnables (regarder sur le web) aux propriétés d'un vaisseau sanguin (une artère) et du sang, et estimer ainsi la vitesse de propagation de l'onde. Cette vitesse est facilement mesurable en enregistrant le délai entre le battement du cœur et le ressenti du pouls au niveau du poignet.